



TITLE:

# 1位の極をもつ線形全微分方程式 (複素領域における微分方程式)

AUTHOR(S):

高野, 恭一

---

CITATION:

高野, 恭一. 1位の極をもつ線形全微分方程式 (複素領域における微分方程式). 数理解析研究所講究録 1979, 351: 14-21

ISSUE DATE:

1979-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104389>

RIGHT:

# 1 位の極をもつ線形全微分方程式

神大 理 高野 恭一

## § 1. 序

2 変数超幾何微分方程式といわれるものが 14 知られてい  
るが、その中で Appell の  $F_1, F_2, F_3$  と Horn の  $G_2, H_2$  は  
いずれも次の形の完全積分可能な線形全微分方程式にかける:

$$du = \left( \sum_{i=1}^N A_i dh_i / h_i \right) u,$$

ここで  $u$  は複素ベクトル,  $h_i$  は  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  における斉次多項式,  
 $A_i$  は定数行列である。

この方程式は  $\{h_i=0\}_i$  上に 1 位の極をもつから、  
 $\{h_i=0\}_i$  は確定特異点である。特異曲線  $\{h_i=0\}_i$  上の  
各点の近傍で解の局所的ふるまいを調べることを問題とする  
。特異曲線が正規交叉であるような点の近傍においては一般  
解を構成する方法がわかっていく ([4]) ので、正規交叉とな  
い点の近傍で考える。そのような場合の reduction theorem  
を得るのがこの小文の目的である。

## §.2. 結果の説明.

局所理論であるので考える方程式は  $\mathbb{C}^2$  の原点で定義された  
次の形のものをとする:

$$du = \Omega u, \quad \Omega = \sum_{\mu=1}^m A_{\mu}(x) dh_{\mu} / h_{\mu} + (4),$$

ここで  $A_{\mu}(x)$  は各成分が原点の近傍  $U$  で正則な行列, (4)  
は各成分が  $U$  で正則な 1-form である行列,  $h_{\mu}(x)$  は  $h_{\mu}(0)=0$ ,  
 $dh_{\mu}(0) \neq 0$  なる  $U$  で正則な関数とする。

$$S = \bigcup_{\mu=1}^m S_{\mu}, \quad S_{\mu} = \{x \in U \mid h_{\mu}(x) = 0\}$$

とおく。  $S_{\mu} \cap S_{\nu} = \{0\}$  ( $\mu \neq \nu$ ) と仮定してよい。

このように  $\Omega$  に対して各  $S_{\mu}$  における residue が

$$\text{Res}_{S_{\mu}} \Omega = A_{\mu}(x) \Big|_{S_{\mu}}$$

と定義できる。これは  $S_{\mu}$  上で正則である。(residue が  
正則なものだけと考えていい訳で、衛藤恭司氏の理論からみ  
ると問題がある。しかし序で述べた具体的な方程式には適用  
できるということ、また以下の話では「固有値条件」がつか  
まとい、固有値条件のもとではこのようなものに限ってよい  
のでそこでは一応満足したことにしておく。)

さて何回か blow up して  $\{S_{\mu}\}_{\mu=1}^m$  が正則交叉になるよう  
にする。blow up の合成を  $\sigma$  とかこう。  $\sigma^*(S)$  は既約成

命に命ぜられ

$\sigma^*(S) = S' = \bigcup_{\mu=1}^{m+n} S'_\mu$ ,  
 $\sigma(S'_\mu) = S_\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq m$ , とかく。  $S'_\mu, m+1 \leq \mu \leq m+n$  を例外曲線とよぶ。

$\sigma^*\Omega$  に対しても各  $S'_\mu$  における residue  $\text{Res}_{S'_\mu} \sigma^*\Omega$  が定義できる。これも  $S'_\mu$  上正則である。例外曲線はコンパクトだから

$\text{Res}_{S'_\mu} \sigma^*\Omega$ ,  $m+1 \leq \mu \leq m+n$ ,  
 は定数行列である。すぐにわかるようにこれは  $A_1(0), \dots, A_m(0)$  の非負整数係数の 1 次結合になっている。

定数行列  $A$  のどの固有値の差も 0 以外の整数に等しくなるとき、 $A$  は「固有値条件」をみたすということにすると、主要定理は次のように述べることができる。

定理 完全積分可能な 2 つの線形全微分方程式

$$(1) \quad du = \Omega u, \quad \Omega = \sum_{\mu=1}^m A_\mu(x) dh_\mu / h_\mu + \textcircled{H},$$

$$(2) \quad dv = \hat{\Omega} v, \quad \hat{\Omega} = \sum_{\mu=1}^m \hat{A}_\mu(x) dh_\mu / h_\mu + \textcircled{\hat{H}}$$

が与えられたとする。ここで  $A_\mu(x), \hat{A}_\mu(x)$  は  $U$  で正則な行列,  $\textcircled{H}, \textcircled{\hat{H}}$  は各成分が  $U$  で正則な 1-forms である行列とす。さらに

$$(i) \quad A_\mu(0) = \hat{A}_\mu(0), \quad 1 \leq \mu \leq m$$

$$(ii) \quad A_\mu(0) (= \hat{A}_\mu(0)), \quad 1 \leq \mu \leq m, \quad \text{Res}_{S'_\mu} \sigma^*\Omega (= \text{Res}_{S'_\mu} \sigma^*\hat{\Omega}),$$

$m+1 \leq \mu \leq m+n$ , はいづれも '固有値条件' とみえたとする。  
 このとき  $U$  において正則, 可逆な  $P(0)=I$  なる行列  $P(x)$   
 が存在して

$$u = P(x)v$$

により (1) (2) に変換される。さらにこのような  $P(x)$  は  
 一意的である。

注意 1.  $S = \cup S_\mu$  が次のような性質をもっているとする。  
 i.e.

$$du = (\sum A_\mu(x) dh_\mu / h_\mu + \textcircled{a}) : \text{完全積分可能}$$

$$\Rightarrow du = (\sum A_\mu(0) dh_\mu / h_\mu) u : \text{完全積分可能。}$$

このような  $S$  に対しては上の定理はたゞちに reduction  
 theorem にかきかえられる。このような  $S$  の例はいくら  
 でもあるが 例えは

$$S = \{xy(y-x^2) = 0\}$$

もそうである。  $S$  が超平面 (ここでは直線) の族のときも  
 そうであるので [3] の定理は上の定理の系となる。それと  
 かくと、

系 (1) において  $h_\mu(x)$ ,  $1 \leq \mu \leq m$ , は  $x$  の各 1 次式とする。  
 $A_\mu(0)$ ,  $1 \leq \mu \leq m$ ,  $\sum_{\mu=1}^m A_\mu(0)$  が '固有値条件' とみえ  
 るならば、  $U$  で正則, 可逆,  $P(0)=I$  なる  $P(x)$  が存在して

$$u = P(x)v$$

により (1) は

$$dV = \left( \sum_{\mu=1}^m A_{\mu}(0) dh_{\mu} / h_{\mu} \right) u$$

に変換される。

注意2. [3] においては  $S$  が超平面の族であることを用いておけるので仮定は少し弱く、 $A_{\mu}(0)$ ,  $1 \leq \mu \leq m$ , について '固有値条件' はいらなかった。

### §.3. 補題.

定理の証明に用いる補題を述べておく。[4] の計算を忠実に追えばえられる。

補題.  $\mathbb{C}^2$  の原点の近傍で定義された完全積分可能な方程式

$$(3) \quad du = \left( \sum_{j=1}^2 A_j(x) dx_j / x_j \right) u$$

$$(4) \quad dV = \left( \sum_{j=1}^2 \hat{A}_j(x) dx_j / x_j \right) u$$

が与えられたとする。ここで  $A_j(x)$ ,  $\hat{A}_j(x)$  は  $U(2)$  正則な行列<sup>2)</sup>、

$$A_1(0, x_2) = \hat{A}_1(0, x_2) = \text{定数行列.}$$

$$A_2(0, x_2) = \hat{A}_2(0, x_2)$$

かつ  $A_1(0, x_2) (= \hat{A}_1(0, x_2) = A_1(0, 0) = \hat{A}_1(0, 0))$ ,  $A_2(0, 0) (= \hat{A}_2(0, 0))$  は '固有値条件' をみたすとする。とすると  $U(2)$  正則, 可逆,  $P(0) = I$  なる行列  $P(x)$  が存在して

$$u = P(x)v$$

により(3) (2)(4)に変換される。しかもこのような  $P(x)$  は一意的に定まる。

#### 3.4. 定理の証明の概略

$$V = \sigma^{-1}(U)$$

とおく。  $V$  の開被覆  $V = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$  を次のようにとる:

(i)  $V_{\alpha}$  は単連結, (ii)  $V_{\alpha}$  は高々2つの特異曲線と交わり少なくとも1つの例外曲線と交わる。さらに  $V_{\alpha}$  の局所座標  $y^{\alpha} = (y_1^{\alpha}, y_2^{\alpha})$  を  $V_{\alpha}$  と交わる特異曲線が座標軸と一致するようにとる。

容易にわかるように  $\sigma^* \Omega, \sigma^* \hat{\Omega}$  は  $V_{\alpha}$  にあつて

$$\sigma^* \Omega = \sum_{j=1}^2 B_j^{\alpha}(y^{\alpha}) dy_j^{\alpha} / y_j^{\alpha},$$

$$\sigma^* \hat{\Omega} = \sum_{j=1}^2 \hat{B}_j^{\alpha}(y^{\alpha}) dy_j^{\alpha} / y_j^{\alpha},$$

$B_j^{\alpha}(y^{\alpha}), \hat{B}_j^{\alpha}(y^{\alpha})$  は  $V_{\alpha}$  で正則, とかける。さらに次のことも確かめられる。  $\{y_j^{\alpha} = 0\} = \text{例外曲線 } S'_{m+\nu_{\alpha}}$  なるが、

$$B_j^{\alpha}(y^{\alpha}) \Big|_{y_j^{\alpha}=0} = \hat{B}_j^{\alpha}(y^{\alpha}) \Big|_{y_j^{\alpha}=0} = \text{Res}_{S'_{m+\nu_{\alpha}}} \sigma^* \Omega = \text{Res}_{S'_{m+\nu_{\alpha}}} \sigma^* \hat{\Omega},$$

$\{y_j^{\alpha} = 0\} = S'_{\mu_{\alpha}}, 1 \leq \mu_{\alpha} \leq m$ , なるが、

$$B_j^{\alpha}(y^{\alpha}) \Big|_{y_j^{\alpha}=0} = \hat{B}_j^{\alpha}(y^{\alpha}) \Big|_{y_j^{\alpha}=0}, B_j^{\alpha}(0) = \hat{B}_j^{\alpha}(0) = A_{\mu_{\alpha}}(0).$$

開被覆  $V = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$  のとり方より,  $\{y_{\alpha\alpha}^{\alpha} = 0\}$  が例外曲線であるとする. 上の考察より §3 の補題が適用でき,  $V_{\alpha}$  で正則, 可逆,  $P_{\alpha}(y^{\alpha}) \Big|_{y_{\alpha\alpha}^{\alpha} = 0} = I$  なる行列  $P_{\alpha}(y^{\alpha})$  が存在して

は  $\sigma^* \Omega \xrightarrow{u = P_{\alpha}(y^{\alpha})^*} \sigma^* \hat{\Omega}$  に変換する. 従って  $V_{\alpha} \cap V_{\beta} (\neq \emptyset)$  において

$$P_{\alpha}(y^{\alpha}) = P_{\beta}(y^{\beta})$$

がいえれば定理の証明は完了することになる. それには,

$V_{\alpha} \cap V_{\beta}$  と交わる例外曲線を  $S'_{m+\nu_{\alpha\beta}}$  とおいて,  $V_{\alpha} \cap V_{\beta}$  において  $\sigma^* \Omega, \sigma^* \hat{\Omega}$  が"どの"ような形になっているかを見

て,  $P_{\alpha}(y^{\alpha}) \Big|_{S'_{m+\nu_{\alpha\beta}}} = P_{\beta}(y^{\beta}) \Big|_{S'_{m+\nu_{\alpha\beta}}} = I$  に注意すると

補題の一意性から  $P_{\alpha}(y^{\alpha}) = P_{\beta}(y^{\beta})$  がいえはよい.

## References

- [1] Gérard, R., Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe, J. Math. Pures Appl., 47 (1968), 321-404.
- [2] Gérard, R. et A.H.M. Levelt, Sur les connexions a singularités régulières dans le cas de



plusieurs variables, Funkcial. Ekvac. 19 (1976),  
149-173.

- [3] Takano, K., Reduction theorem for a linear Pfaffian system with regular singular points (to appear).
- [4] Yoshida, M. and K. Takano, On a linear system of Pfaffian equations with regular singular points, Funkcial. Ekvac. 19 (1976), 175-189.